29-9-14.

Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση.

Βιβλία (κ. Ακρίβης, Δουγαλής ή του κ. Μιχαήλ Βραχάτη).

__Γενικά__

Τι είναι αριθμητική ανάλυση;

__Αριθμ. ανάλυση__ είναι ο επιστημονικός κλάδος που μετατρέπει ένα μαθηματικό πρόβλημα σε ισοδύναμο που μπορεί να λυθεί με τη χρήση ή να προσεγγιστεί με τη χρήση ηλεκτρονικών υπολογιστών. Ουσιαστικά γίνεται διακριτοποίηση συνεχών προβλημάτων και στη συνέχεια λύση ή προσέγγιση του διακριτού προβλήματος.

__Στόχος της__ Αριθμητικής Ανάλυσης είναι η επινόηση "αξιόπιστων" και "αποτελεσματικών" μεθόδων για την προσέγγιση προβλημάτων.

"__Αξιόπιστες__" με την έννοια ότι μικρά σφάλματα στα δεδομένα ή στις ενδιάμεσες πράξεις επιφέρουν σχετικά μικρά σφάλματα στο αποτέλεσμα. Γνωρίζουμε άνω φράγμα του σφάλματος που είναι σε επιθυμητά πλαίσια.

"__Αποτελεσματικές__" με την έννοια ότι μπορεί να λυθεί με τον υπολογιστή που διαθέτουμε και να λυθεί σε χρόνο ώστε να μπορεί να χρησιμοποιηθεί. (το αποτέλεσμα)

__Σφάλματα:__

Δύο είδη σφαλμάτων: __σφάλμα διακριτοποίησης ή προσέγγισης__

Είναι το σφάλμα που προκύπτει από τη διακριτοποίηση του συνεχούς προβλήματος

__Σφάλμα στρογγύλευσης:__ Τα σφάλματα κατά την αποθήκευση στον Η/Υ.

Ορισμός του σφάλματος: Κατά τον υπολογισμό της ποσότητας x υπολογίζουμε την προσεγγιστική "x^*". Το σφάλμα ορίζεται ως $\varepsilon = x^* - x$

Απόλυτο σφάλμα: $|e| = |x^* - x|$.

Σχετικό σφάλμα: $d = \frac{x^* - x}{x} \approx \frac{x^* - x}{x^*}$, $x \neq 0$.

Απόλυτο σχετικό σφάλμα: $|d| = \left|\frac{x^* - x}{x}\right| \approx \left|\frac{x^* - x}{x^*}\right|$

<u>Παράδειγμα</u>: Έστω f συνεχής και παραγωγίσιμη δύο φορές στο διάστημα (a,b), ($f \in C^2(a,b)$). Επιθυμούμε να υπολογίσουμε την $f'(x_0)$ όπου $x_0 \in (a,b)$. Αντί της $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, υπολογίζουμε την ποσότητα $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$, $x_1 \in (a,b)$ σχετικά κοντά στο x_0.

Ποιό είναι το σφάλμα;

$$\varepsilon = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} - f'(x_0)$$

Θεωρούμε το ανάπτυγμα **Taylor**

$$f(x_1) = f(x_0) + (x_1 - x_0) \cdot f'(x_0) + \frac{(x_1 - x_0)^2}{2} \cdot f''(\xi),$$

$\xi \in (\min\{x_0, x_1\}, \max\{x_0, x_1\})$.

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(x_0) + \frac{(x_1 - x_0)}{2} \cdot f''(\xi) \Leftrightarrow \varepsilon = \frac{x_1 - x_0}{2} \cdot f''(\xi).$$

Αν η f'' είναι απόλυτα φραγμένη στο (a,b), $|f''(x)| \leq M$ τότε το $|e| \leq \frac{M}{2} |x_1 - x_0|$.

Ένας αριθμός παριστάνεται στο δεκαδικό ως $\pm(a_N a_{N-1} \cdots a_0 . a_{-1} a_{-2} \ldots)_{10}$ $\pm(a_N \cdot 10^N + a_{N-1} \cdot 10^{N-1} + \cdots + a_0 + a_{-1} \cdot 10^{-1} + a_{-2} 10^{-2} + \ldots)$ a_i ψηφία από 0 έως 9.

Ένας αριθμός σε σύστημα με βάση β παριστάνεται:

$\pm(a_N a_{N-1} \ldots a_0 . a_{-1} a_{-2} \ldots)_\beta = \pm \sum_{-\infty}^{i=N} a_i \cdot \beta^i$, a_i ψηφία από 0 έως $\beta-$

Μετατροπή από σύστημα με βάση β στο δεκαδικό α) Ακέραιοι

$(a_N a_{N-1} \dots a_0)_\beta = a_0 + a_1\beta + \dots + a_{N-1}\beta^{N-1} + a_N\beta^N$

Υπολογισμός του πολυωνύμου $P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_N \cdot x^N$.
για $x = \beta$

$$P(x) = a_0 + x(a_1 + x_2(a_2 + \dots \overbrace{(a_{N-1} + a_N x)}) \dots) \leftarrow \text{Σχήμα Horner}$$

$y \leftarrow a_0$
$\underline{a_N}$

Για i από $N-1$ έως 0
$y \leftarrow a_i + x \cdot y \leftarrow$ flop } ανακύκλωση

- $(1\ 2\ 3\ 4)_5 = 4 + 3\cdot 5 + 2\cdot 5^2 + 1\cdot 5^3 = 4 + 15 + 50 + 125 = (194)_{10}$

β) Κλασματικό μέρος

$(a_{-1} a_{-2} \dots)_\beta = \sum_{i=1}^{\infty} a_{-i}\beta^{-i}$

- $(1\ 0\ 1\ 1\ 1)_2 = 1\cdot 2^{-1} + 0\cdot 2^{-2} + 1\cdot 2^{-3} + 1\cdot 2^{-4} + 1\cdot 2^{-5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} =$

$0.5 + 0.125 + 0.0625 + 0.03125$.